

Ορισμός (Εκτιμητής Bayes)

Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ από πληθυσμό με σπν ή σπ $f(x|\theta)$ όπου θ η τιμή της εκ Θ με εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$. Ο εκ των υστέρων εκτιμητής Bayes της $g(\theta)$, ορίζεται από τη σχέση:

$$T^* = E_{\theta/x}(g(\theta)) = \begin{cases} \sum g(\theta) \cdot (\sigma \pi \theta/x) \\ \int g(\theta) \cdot \pi(\theta/x) d\theta \end{cases}$$

Ορισμός (Συνάρτηση Διακινδύνευσης κατά Bayes)

Ορίζεται ως συνάρτηση διακινδύνευσης κατά Bayes

$R(\pi, d)$, έχονται εκ των προτέρων κατανομή π να είναι ισό με $E[R(\theta, d)]$

d : κανόνας απόφασης.

όπου $R(\theta, d) = E_{x|\theta}(L(\theta, d))$

Ορισμός (Εκτιμητής Bayes)

Ένας εκτιμητής D^* ορίζεται να είναι ένας εκτιμητής Bayes αν

$$R(\pi, d^*) = \min_{d \in D} R(\pi, d)$$

Πρόταση

Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τδ από πληθυσμό με σπν ή σπ $f(x|\theta)$ όπου θ η τιμή της εκ Θ με εκ των προτέρων $\pi(\theta)$. Αν $L(\theta, d)$ συμπερνάει. Τότε ο εκτιμητής Bayes $\checkmark$ ^{arg g(θ)} είναι το στατιστικό d^* που ελαχιστοποιεί την $E_{\theta/x}(L(g(\theta), d))$.

Απόδειξη

d^* εξορισθίου ελαχιστοποιεί την $R(\eta, d)$

Αντάδην, εξορισθίου ελαχιστοποιεί την $E_\theta(R(\theta, d))$
(Συνεχής Περίπτωση)

Ελαχιστοποίησης της $E_\theta(R(\theta, d))$ σημαίνει ελαχιστοποίηση του $\int R(\theta, d) \pi(\theta) d\theta = \int E_{x/\theta}(L(g(\theta, d))) d\theta =$

$$= \iint L(g(\theta, d)) \cdot \underbrace{f(x/\theta) \pi(\theta)}_{\text{συνολικός}} d\theta dx =$$

$$= \iint L(g(\theta, d)) \cdot h(x, \theta) d\theta dx =$$

$$= \iint L(g(\theta, d)) \cdot \pi(\theta/x) \cdot \underbrace{q_\theta(x)}_{\text{η εξορισθίου}} d\theta dx$$

Η ζητούμενη ελαχιστοποίηση ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση του $\int L(g(\theta, d)) \cdot \pi(\theta/x) d\theta$ ως προς d .

$$= E_{\theta/x}(L(g(\theta, d)))$$

Πορεία

Αν L είναι η συνάρτηση χητώδους του τετραγωνικού σφάλματος τότε d^* είναι η αναμενόμενη τιμή:

$$d^* = E_{\theta/x}(g(\theta))$$

Απόδειξη

Δείξαμε ότι d^* ελαχιστοποιεί την $E_{\theta/x}(L(g(\theta, d)))$

Αρα πρέπει να ελαχιστοποιήσω την ποσότητα:

$$E_{\theta/x}(g(\theta) - d)^2$$

(Συνεχής περίπτωση)

Αρκεί να ελαχιστοποιήσω ως προς d την ποσότητα

$$\int (g(\theta) - d)^2 \cdot \pi(\theta/x) d\theta$$

Παραγωγίζω ως προς d .

τότε, παίρνουμε:

$$\int -2 \cdot (g(\theta) - d) \cdot \pi(\theta/x) d\theta$$

Επειτα θεωρούμε την παράγωγο ισχύ με μηδέν
Αλλάζουμε:

$$\int (g(\theta) - d) \cdot \pi(\theta/x) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int g(\theta) \pi(\theta/x) d\theta = \int d \cdot \pi(\theta/x) d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\theta/x}(g(\theta)) = d \cdot \int \pi(\theta/x) d\theta = d$$

Αυτο το d λοιπόν είναι είτε ελάχιστο είτε μέγιστο. Αυτό το εξαρτάται από την 2^η παράγωγο. Ή ανα παραγωγίζουμε ως προς d .

Αρα, $2 \int \pi(\theta/x) d\theta = 2 > 0 \Rightarrow$ Αρα, d είναι

ακριβώς η ποσότητα:

$$E_{\theta/x}(g(\theta))$$

(Ως προς το T.S)

Πορίσμα

Αν η συνάρτηση απώλειας είναι το απόλυτο σφάλμα, τότε ο ευχρηστικός Bayes της θ είναι η διάμεσος της $\pi(\theta/x)$, δηλαδή $d^* = \text{median} \pi(\theta/x)$

όπου η διάμεσος είναι εκείνο το σημείο της $\pi(\theta/x)$

$$\int_{-\infty}^{d^*} \pi(\theta/x) d\theta = \int_{d^*}^{+\infty} \pi(\theta/x) d\theta = 0,5$$

Απόδειξη

Έχω αποδείξει ότι d^* ελαχιστοποιεί την

$$E_{\theta/x}(L(\theta, d)) = \int |d - \theta| \cdot \pi(\theta/x) d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^d (d-\theta) \pi(\theta/x) d\theta + \int_d^{+\infty} -(d-\theta) \pi(\theta/x) d\theta \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Διαφορίσουμε ως προς d , λαμβάνουμε:

(από τον τύπο του Leibniz)

$$\int_{-\infty}^d \pi(\theta/x) d\theta + (d-d) \pi(d/x) \cdot 1 + \int_d^{+\infty} -\pi(\theta/x) d\theta$$

$$+ (d-d) \pi(d) \cdot 1 =$$

$$= \int_{-\infty}^d \pi(\theta/x) d\theta + \int_d^{+\infty} -\pi(\theta/x) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^d \pi(\theta/x) d\theta = \int_d^{+\infty} \pi(\theta/x) d\theta$$

και όπου είναι σφίγιο ελαχίστου, αφού

παράγωγιστος δεύτερου τύπου λαμβάνουμε

$$\pi(d/x) + \pi(d/x) = 2 \pi(d/x) \geq 0.$$

Παράδειγμα 1

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim P(\theta)$, όπου θ είναι η τιμή θ με εκ των προτέρων κατανομή των $\text{Gamma}(p, \frac{1}{q})$

- Να βρεθεί ο ευτιμυτής Bayes της θ και $e^{-\theta}$ με σφάλτρου ανώτεια το τ.ε
- Να βρεθεί ο ευτιμυτής Bayes τω θ με σφάλτρου ανώτεια εν linex

Λύση

$$f(x|\theta) = \frac{e^{-\theta} \cdot \theta^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$$

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{p-1} \cdot e^{-\theta q}}{(\frac{1}{q})^p \cdot \Gamma(p)}, \quad \theta > 0$$

$$\pi(\theta/x) \propto \theta^{p-1} \cdot e^{-\theta \cdot p} \cdot e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum x_i} = \theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(p+n)}$$

όπου $\theta > 0$

Εστω, $\theta/x \sim \text{Gamma}(p + \sum x_i, \frac{1}{q+n})$

Ετσι,

$$\pi(\theta/x) = \frac{\theta^{p+\sum x_i-1} \cdot e^{-\theta(p+n)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\sum x_i} \cdot \Gamma(p+\sum x_i)}, \quad \theta > 0$$

(Η $\pi(\theta/x)$ συνάρτηση)

Από το 1^ο Πρόβλημα:

$$1) d_1^* = E_{\theta/x}(\theta) = \int_0^\infty \theta \cdot \pi(\theta/x) d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\theta^{p+\sum x_i} \cdot e^{-\theta(q+n)}}{\left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\sum x_i} \cdot \Gamma(p+\sum x_i)} d\theta =$$

$$= \frac{(q+n)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \cdot \int_0^\infty \theta^{p+\sum x_i} \cdot e^{-\theta(q+n)} d\theta =$$

$$= \frac{(q+n)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \int_0^\infty \theta^{(p+\sum x_i+1)-1} \cdot e^{-\theta/1/(q+n)} d\theta =$$

$$= \frac{(q+n)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \cdot \left(\frac{1}{q+n}\right)^{p+\sum x_i+1} \cdot \Gamma(p+\sum x_i+1) \cdot 1 =$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

$$= \frac{p+\sum x_i}{q+n} \quad \leftarrow \text{Εκτίμηση Bayes.}$$

Αν μας δινόσαν ευχολόγιο τότε από τον ορισμό της μέσης τιμής βγαίνει άμεσα

$$d_1^* = E_{\theta/x}(\theta) = \frac{p+\sum x_i}{q+n}$$

$$2) d_2^* = E_{\theta/x}(e^{-\theta}) = \int_0^\infty e^{-\theta} \pi(\theta/x) d\theta = \dots =$$

$$= \frac{(q+n)^{p+\sum x_i}}{\Gamma(p+\sum x_i)} \cdot \frac{\Gamma(p+\sum x_i)}{(q+n+1)^{p+\sum x_i}} = \left[\frac{q+n}{q+n+1}\right]^{p+\sum x_i}$$

ε' (prior)

$$E_{\theta|x}(e^{-\theta}) = E_{\theta|x}(e^{-\theta \cdot 1}) = m_{\theta|x}(t = -1)$$

$$\text{όπου } \theta|x \sim \text{Gamma}\left(p + \sum x_i, \frac{1}{q+n}\right)$$

Από το γνωστό

$$m_{\theta|x}(t) = \left(1 - \frac{1}{q+n} t\right)^{-(p+\sum x_i)}, \quad t < q+n$$

για $t = -1$ (μπορεί να εφαρμοστεί αφού $-1 < q+n$)

$$m_{\theta|x}(-1) = \left(1 + \frac{1}{q+n}\right)^{-(p+\sum x_i)} = \left[\frac{q+n}{n+q+n}\right]^{p+\sum x_i}$$

Σχόλιο

$$m_x(t) = E(e^{tx}) \Rightarrow m_x'(t) = E(x \cdot e^{tx})$$

$$m_x'(0) = E(x)$$

$$m_x''(t) = E(x^2 \cdot e^{tx})$$

$$m_x''(0) = E(x^2)$$

⋮

$$m_x^{(k)}(t) = E(x^k \cdot e^{tx})$$

$$m_x^{(k)}(0) = E(x^k)$$

ii) Ελαχιστοποίηση ως προς d της $E_{\theta|x} L(\theta, d)$

δυν. της ποσότητας:

$$\int_0^\infty \left\{ e^{k(d-\theta)} - k(d-\theta) - 1 \right\} \pi(\theta|x) d\theta$$

Διαφορίτω ως προς d και παίρνω:

$$\int_0^\infty (k e^{k(d-\theta)} - k) \pi(\theta|x) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{k(d-\theta)} \pi(\theta|x) d\theta = \int_0^\infty \pi(\theta|x) d\theta = 1$$

$$\Rightarrow e^{kd} \cdot \int_0^{\infty} e^{-k\theta} \cdot \pi(\theta|x) d\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{kd} \cdot E_{\theta|x}(e^{-k\theta}) = 1 \Rightarrow kd = \log \left[\frac{1}{E_{\theta|x}(e^{-k\theta})} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{k} \cdot \log \left[\frac{1}{E_{\theta|x}(e^{-k\theta})} \right] \quad (1)$$

$$E(e^{-k\theta}) = M_{\theta|x}(-k) \stackrel{!}{=} E_{\theta|x}(e^{-k\theta}) = \int_0^{+\infty} e^{-k\theta} \pi(\theta|x) d\theta$$

1 Παράδειγμα 2

Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$

Ποιος ο εκτιμητής Bayes του θ όταν η σωάρτηση απώλειας είναι η $\lambda(\theta, d) = \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2}$

ΛΥΣΗ

$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x_i < \theta$$

$$\pi(\theta) = 1, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\pi(\theta|x) = \frac{1 \cdot \frac{1}{\theta^n}}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^n} d\theta} = \frac{\theta^{-n}}{\frac{1}{n} (1 - x(n)^n)}, \quad x(n) < \theta < 1$$

Παραγωγίζω ως προς d τη σφαιρα

$$\int_{x(n)}^1 \frac{(d-\theta)^2}{\theta^2} \pi(\theta|x) d\theta =$$

Αρα, παίρνω

$$\int_{x(n)}^1 2 \frac{(d-\theta)}{\theta^2} \cdot \pi(\theta|x) d\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^2} \pi(\theta|x) d\theta = \int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta} \pi(\theta|x) d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta} \pi(\theta|x) d\theta}{\int_{x(n)}^1 \frac{1}{\theta^2} \pi(\theta|x) d\theta} = \frac{\int_{x(n)}^1 \theta^{-1} \cdot \theta^{-n} d\theta}{\int_{x(n)}^1 \theta^{-2} \cdot \theta^{-n} d\theta} = \dots$$

Εφαρμογή
 $X_1, X_2, \dots, X_n \sim B(1, \theta)$ με εκ των προτέρων κατανομή για θ $Beta(a, b)$. Να βρεθεί ο εσθμισμένος Bayes της θ και $\theta(1-\theta)$ με σφάλμα ϵ .
 Λύνεται το ε.σ.

Optimality
Evans gurukumar d* optimal action minmax
$$\max_{\theta} R(\theta, d^*) \leq \max_{\theta} R(\theta, d), \forall d \in D$$

Ansatz, $\min_d \max_{\theta} R(\theta, d)$

Θεωρήματα

Εστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.σ. από ν.α.δ. με σπ. $f(x|\theta)$ με θ τις προτ. π.θ.

Αν d^* είναι ο ευχρηστικός Bayes της $g(\theta)$ και $R(g(\theta), d^*) = \sigma(\theta) \Rightarrow d^*$ είναι ο $\min \max g(\theta)$

Προσοχή!
Το θεωρημα αυτο δεν συνταρει πως θα βρισκεται
ενος minmax ευθυμους αλλα ποτε ενος ευθυ-
μους Bayes ενος minmax.

Απόδειξη (Θεωρήματος)

050 d^* Given minmax. (Δx us btabu $g(0)=0$)

$$\text{Apkg vfo } \max R(\theta_d^*) \leq \max R(\theta_d), \forall d$$

Είχαν $\max_{\theta} R(\theta, d^*) = \min_{\sigma_{\pi, \theta}} R(\theta, d^*) = c$, c : σταθερά

Opus,

$$C = \int_0^{2\pi} C \cdot r(\theta) d\theta \quad (\text{το ολοκλήρωμα είναι αυθαίρετο})$$

d^* — лучший Байес: $R(n, d^*) \leq R(n, d)$

$$E_0''(R(Q, d^*))$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ετσι, } \max_{\theta} R(\theta, d^*) &= \mathbb{E}_{\theta}(R(\theta, d^*)) = R(\eta, d^*) \leq \\
 &\leq R(\eta, d) = \int R(\theta, d) \pi(\theta) d\theta \leq \\
 &\leq \int \max_{\theta} R(\theta, d) \cdot \pi(\theta) d\theta \leq \max_{\theta} R(\theta, d) \int \pi(\theta) d\theta = \max_{\theta} R(\theta, d)
 \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

Αν μου ζητάει να εξετάσω ποτέ ένας ευχρηστικός Bayes είναι minmax αρκεί να εξετάσω ποτέ $R(g(\theta), d^*)$ είναι σταθερή.